Bemerkungen zu den theoretischen Grundlagen der stationären Wasserspiegellagenberechnung

Vor mehr als 10 Jahren wurde das BWK-Merkblatt „Hydraulische Berechnung von naturnahen Fließgewässern“ von der damaligen BWK-Arbeitsgruppe 7.2 veröffentlicht. Der Verfasser dieser Bemerkungen war damals Mitglied dieser Arbeitsgruppe. Seine Einwendungen zur Darstellung der Grundgleichungen konnten damals aus Zeitgründen nicht diskutiert werden. Es ist erstaunlich, dass sich bisher noch kein Fachmann zum Widerspruch der im BWK-Bericht 1/2000 [1] veröffentlichten Ableitungen geäußert hat. Erst U. Teschke von der HCU-Hamburg will sich in einem aktuellen Forschungsprojekt [5] mit diesem Widerspruch beschäftigen.

1.) Impulsverteilungsbeiwert oder Geschwindigkeitsverteilungsbeiwert ?

Im Ergebnis führen die Ableitungen im BWK-Heft 1/2000 zu widersprüchlichen Arbeitsgleichungen, auch wenn man einen unveränderlichen Abfluss (Q=konst) voraussetzt.

Aus dem Impulssatz:

$$dh = \frac{\left(\alpha'_{i+1} \cdot v_{i+1}{}^{2}\right) - \left(\alpha'_{i+1} \cdot v_{i+1}{}^{2}\right)}{2g} + \frac{\Delta x \cdot \left(i_{Ri} + i_{Ri+1}\right)}{2} \qquad (1)$$

Aus dem Energiesatz:

$$dh = \frac{\left(\alpha_{i+1} \cdot v_{i+1}{}^{2}\right) - \left(\alpha_{i+1} \cdot v_{i+1}{}^{2}\right)}{2g} + \frac{\Delta x \cdot \left(i_{Ei} + i_{Ei+1}\right)}{2} \qquad (2)$$

mit dh = Wasserspiegeldifferenz zwischen i-1 und i
vi = mittlere Geschwindigkeit Q/A im OW-seitigen Querschnitt i
i_R = Reibungsgefälle
i_E = Energieliniengefälle
A = Fliessquerschnitt
Dx = Abstand zwischen i-1 und i

Bei formal gleichen Ausdrücken für die numerische Lösung der Wasserspiegeldifferenz, enthält die Ableitung aus dem Impulssatz den Impulsverteilungsverteilungsbeiwert **a’** (Boussinesq-Koeffizient 1877), die Ableitung aus dem Energiesatz aber den Geschwindigkeitsbeiwert **a** (Coriolis-Koeffizient 1836).

$$\alpha' = \frac{\int v_i^{2} dA}{v^{2} A} \qquad (3) \qquad\qquad \alpha = \frac{\int v_i 3 dA}{v^{3} A} \qquad (4)$$

Beide Beiwerte sind nur im Sonderfall der gleichförmigen Geschwindigkeit zahlenmäßig gleich.

Auch von VenTe Chow (1959) und Tiedt (1971) kommen bei ihren Ableitungen aus dem Impulssatz und dem Energiesatz zu einem ähnlichen Ergebnis.

Aus dem Impulssatz :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{is - i_R}{1 - \alpha' Fr^{2}} \qquad (5)$$

Aus dem Energiesatz :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{is - i_E}{1 - \alpha Fr^{2}} \qquad (6)$$

Mit $y = h+z$ Wasserspielhöhe
is = Sohlgefälle
Fr = Froude'sche Zahl

In dieser Darstellung wird sehr schön deutlich, warum es nicht möglich ist, mit diesen Ableitungen eine Wasserspiegeldifferenz für den Fall Fr =1 (Grenztiefe) zu berechnen.

Während Ven Te Chow [2] S. 332 die generelle Anwendung von **a** empfiehlt (aus „praktischen Gründen", das Reibungsgefälle wird i.d.R. mit Hilfe der Fließformel von Manning-Strickler berechnet, damit handelt es sich um das Energiegefälle), versucht Tiedt , einen Zusammenhang zwischen Reibungsgefälle und Energiegefälle zu finden mit

$$i_R = i_E \left\{ \frac{1-\alpha' Fr^2}{1-\alpha Fr^2} \right\} + \left\{ \frac{is Fr^2 (\alpha' - \alpha)}{1-\alpha Fr^2} \right\} \qquad (7)$$

Bei Ven Te Chow und Tiedt wird klar unterschieden zwischen Reibungsgefälle i_R für den Impulssatz und Energiegefälle i_E für die Ableitung aus dem Energiesatz. Im Impulssatz spielen nur äußere Kräfte (Wandschubspannungen aus der Reibung) eine Rolle, während beim Energiesatz auch innere Verluste aufgrund unterschiedlicher örtlicher Geschwindigkeiten zum Tragen kommen. Bei der Eichung von k-Werten aus Wasserspiegelmessungen kann man nicht zwischen äußeren und inneren Verlusten differenzieren, deshalb ist davon auszugehen, dass bei k-Werten aus Tabellen immer der Gesamtverlust gemeint ist.

In der Literatur wird der Unterschied zwischen i_R und i_E kaum beachtet, auch in [1] werden diese Werte einfach gleichgesetzt, auch wenn ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilungen klar erkennbar sind. Bei **a** ≠ **a'** kann aber nur eine Lösung richtig sein.

Bereits Jaeger [1949] hat den Unterschied zwischen **e** = **a** – **a'** als Maß für die Turbulenz bezeichnet, der definitionsgemäß immer größer als Null sein muss.
Bei gegliederten Querschnitten kann **e** Werte zwischen 0.4 und 10 annehmen, der Wert für die ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung liegt i.M. bei 2.0, d.h. man kann diese Werte nicht einfach vernachlässigen, während dies für Kompaktquerschnitte durchaus sinnvoll ist.

2.) Korrekturfaktor b in den Grundgleichungen ?

In vielen Wasserspiegelprogrammen werden kein a oder a'–Werte beachtet, wohl aber werden Korrekturfaktoren b für den Geschwindigkeitshöhendifferenz bei verzögerter oder beschleunigter Strömung eingeführt. In den gängigsten Tabellenbüchern [6], [7] werden Korrekturfaktoren vorgeschlagen, die aus der Zeit ohne PC (Naudascher 1956) stammen:

ß = 2/3 für allmähliche Aufweitungen , **ß** = 1 bei Einengungen.

Es ist schon erstaunlich, dass diese Näherungfaktoren noch 1991 Eingang in das sonst doch recht aufwändige Merkblatt DVWK 220 [8], S. 14 gefunden haben und auch weiterhin in fast allen Tabellenbüchern und Hydraulik-Büchern wieder auftauchen.

Diese Vereinfachungen hatten ihren Sinn für Handrechnungen mit dem Rechenstab. Bei Computerprogrammen sollten sie jedoch ersetzt werden durch einen sinnvollen Ansatz für örtliche Einzelverluste (s. [1]), weil diese konstanten Korrekturfaktoren i.d.R. zu hohe Einzelverluste bedeuten, die die angesetzten k-Werte verfälschen, wie folgende Abschätzung zeigen soll.

Aus der Gleichsetzung des Näherungsansatzes mit ß und der Lösung nach Bernoulli und dem örtlichen Zusatzverlust nach Borda-Carnot

$$ß\left(\frac{v_{i-1}^2}{2g} - \frac{v_i^2}{2g} \right) = \frac{v_{i-1}^2}{2g} - \frac{v_i^2}{2g} + \frac{(v_i - v_{i-1})^2}{2g}$$

ergibt sich mit $\eta = \frac{v_i}{v_{i-1}}$

$$ß = \frac{2 - 2\eta}{1 - \eta^2} \qquad (8)$$

Diese Funktion ist in Bild 1 dargestellt.

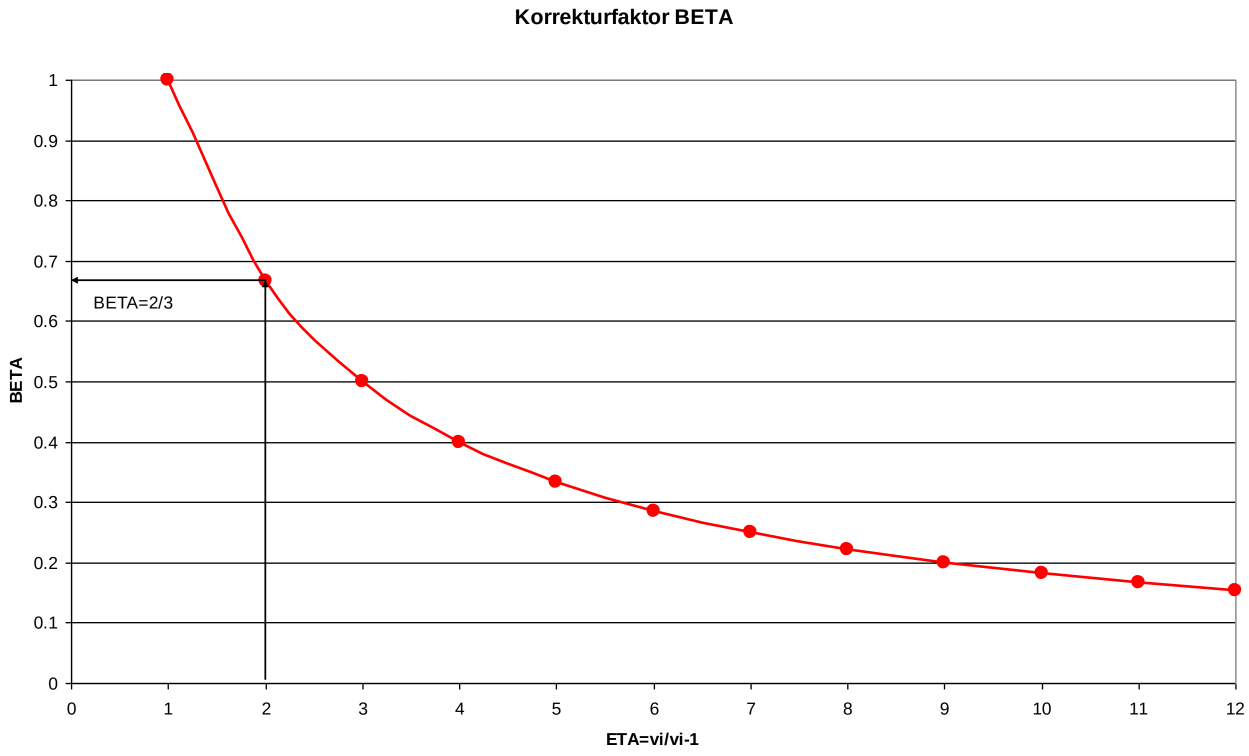

Bild 1 : Korrekturfaktor ß für Erweiterungen

Nur bei Erweiterungen der Fliessquerschnitte mit einer Abminderung der Geschwindigkeit auf die Hälfte (η = vi/vi-1= 2), trifft der Beiwert ß = 2/3 zu (s. Bild 1). Bei allen anderen Geschwindigkeitsverhältnissen müssten andere Beiwerte eingesetzt werden, wenn sich die gleichen Ergebnisse wie bei einem Ansatz für die Erweiterungsverluste nach Borda-Carnot für Erweiterungsverluste ergeben sollen.

Ein Zahlenbeispiel soll verdeutlichen, dass es hier nicht um vernachlässigbare Kleinigkeiten geht:

Angenommen sei ein 500 m langes Rechteckgerinne mit wechselnder Breite, alle 50 m zwischen 20 und 15 m. Die Sohlneigung sei 1 o/oo, der KST-Wert 40 $m^{1/3}/s$. Die Erweiterungsverluste sollten hier nahezu Null sein, weil es sich um allmähliche Erweiterung handelt, die Wandneigung zur Fließrichtung ist deutlich unter 10°. Wenn man aber mit dem Näherungsfaktor ß = 2/3 arbeitet, ergeben sich fiktive örtliche Verluste von ca. 0.02 m bei jedem zweiten Profil. Eine Rückeichung des k-Wertes mit dem so errechneten Endwasserstand nach 500 m, ergibt eine KST-Wert von 31.9 $m^{1/3}/s$. Eine deutlich sichtbare Veränderung des angesetzten Rauheitsbeiwertes.
In diesem Beispiel müsste Korrekturwert nach Gl. (8) mit ß = 0.85 eingesetzt werden, um den vollen Borda-Carnot-Verlust zu erhalten. In der Praxis sollten jedoch die Borda-Werte abgemindert werden, s. c-Werte nach [6] S. 13.30.

Da es heute kein Problem mehr darstellt, lokale Verluste zutreffender zu beschreiben als durch diesen Pauschalansatz, sollte künftig auf die Form der Grundgleichung mit ß verzichtet werden, auch wenn dieser Ansatz in HEC-RAS als Standard angeboten wird.

3. **Veränderlicher Abfluss**

In [1] wird die Empfehlung ausgesprochen, man verwende den Energiesatz für die Berechnung der Wasserspiegeländerung wenn Q konstant bleibt, aber den Impulssatz, wenn Q veränderlich ist.
Diese etwas skurrile Empfehlung bedarf einer Überprüfung.
Mit der 2. Annahme dQ/dx= 0 bei der Ableitung der Arbeitsgleichung aus dem Energiesatz, kann ein Veränderlicher dQ-Term im Ergebnis selbstverständlich nicht mehr auftauchen. Bei der Ableitung aus dem Impulssatz wird dagegen dQ/dx zugelassen.

Dass dieser Einfluss unabhängig von der Wahl Energiesatz oder Impulssatz ist, hat bereits bei Ven Te Chow [2] S. 331ff gezeigt. Dort sind beide Ableitungen nachzulesen.

Ergebnis aus dem Impulssatz :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{is - i_R - 2\alpha' Qq^* / gA^2}{1 - \alpha' Q^2 / gA^2 D} \qquad (9)$$

Ergebnis aus dem Energiesatz :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{is - i_E - \alpha Qq^* / gA^2}{1 - \alpha Q^2 / gA^2 D} \qquad (10)$$

mit $q^*=dQ/dx$
$D= A/B=$hydraulische Tiefe

Wenn man $Q^2 / gA^2 D$ =Fr² setzt und q*=0, ergeben sich wieder die Gleichungen (5) bzw. (6).

Warum in Gleichung (9) ein Faktor 2 auftaucht, wird von Ven Te Chow damit erklärt, dass es sich hier um zunehmenden Abfluss handeln würde, bei Gl. (6) um abnehmenden Abfluss.
Leider ist bei den Ableitungen nicht erkennbar, an welcher Stelle diese Annahmen getroffen wurden.
Ob der 3.Term im Nenner den Einfluss veränderlicher Q-Werte ausreichend beschreibt, sei dahingestellt.
Eine etwas besser nachzuvollziehende Ableitung der Arbeitsgleichung wurde von R.CM. Schröder [10] veröffentlicht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{is - i_R - (v_s \cos\varphi - 2\alpha' v)/gA}{1 - \alpha' Fr^2} \qquad (11)$$

mit $v_s \cos f$ = Geschwindigkeits-Komponente der seitlichen Zuströmung in x-Richtung

In [10] wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass i_R nicht mit i_E verwechselt werden darf. Diese Größen sind bei diskontinuierlichem Abfluss nicht identisch. Damit erhält das anfänglich erwähnte Forschungsvorhaben von Teschke eine zusätzliche Bedeutung. Bisher gibt es keine Möglichkeit Das Reibungsgefälle zutreffend zu ermitteln.

Solange diese Unsicherheiten bestehen erscheint die Verwendung des Energiesatzes mit im Modellversuche ermittelten Verlustbeiwerten nach Mock (s. [11] S. 294) die bessere Alternative zu sein.

4. **Zusammenfassung**

Es gibt Ungereimtheiten bei der Darstellung der Arbeitsgleichungen für stationäre Wasserspiegelberechnungen in den aktuellen Richtlinien und Fachbüchern.
Wenn man die Ergebnisse von verschiedenen Wasserspiegelprogrammen miteinander vergleicht, sollten zunächst die Grundannahmen in den Programmen gleich sein, sonst sind kaum gleiche Ergebnisse zu erwarten. Vielleicht ist es an der Zeit, dass sich ein DIN-Ausschuss einmal mit dieser Problematik beschäftigt. Die vielen Merkblätter der technisch-wissenschaftlichen Vereinigungen (DWA, BWK) haben jedenfalls noch nicht zu einer Vereinheitlichung der Grundannahmen geführt.

Literatur :

[1] BWK	Hydraulische Berechnung von naturnahen Fließgewässern Grundlagen für stationäre, eindimensionale Wasserspiegelberechnungen Berichte 1/2000, BWK Düsseldorf
[2] Ven Te Chow	Open-Channel Hydraulics McGraw-Hill, Tokio 1959
[3] Tiedt, Walter	Hydromechanische Untersuchung des Teilfüllungsproblems Technischer Bericht Nr. 7, IHH, TH-Darmstadt, 1971
[4] Jaeger, Charles	Technische Hydraulik, Birkhäuser Verlag, Basel 1949
[5] Teschke, U.	Kurzbeschreibung zum Forschungsvorhaben „Die Bernoulligleichung in der Abflussberechnung natürlicher Fließgewässer “ Homepage der HafenCity Universität Hamburg, 2011
[6] Schneider	Bautabellen für Ingenieure, 19. Auflage, Wolters Kluwer, Köln 2010
[7] Wendehorst	Bautechnische Zahlentafeln, 32. Auflage, Teubner, Stuttgart 2007
[8] Naudascher, E.	Berechnung der Wasserspiegellage, Der Bauingenieur Heft1, 1956
[9] DVWK	Hydraulische Berechnung von Fließgewässern, Merkblatt 220/1991 Verlag Paul Parey, Hamburg, 1991
[10] Schröder,	Technische Hydraulik, Kompendium für den Wasserbau, 1. Auflage, Springer, Berlin 1994
[11] Schröder, R.	Hydromechanik im Wasserbau, Verlag Wilhelm Ernst, Berlin 1966